

Distanza punto-retta

Facciamo riferimento alla figura **4.29** a pag. 115 del testo e usiamo le notazioni introdotte nel paragrafo **14** a cui appartiene anche la figura.

La penultima formula di pag. 115 afferma che, visto che il punto $H(x_0, y_0)$ appartiene alla retta $r : ax + by + c = 0$, deve valere l'equazione:

$$ax_0 + by_0 + c = 0. \quad (1)$$

La seconda formula nella quarta riga a pag. 116 è:

$$-b(x_1 - x_0) + a(y_1 - y_0) = 0. \quad (2)$$

Visto che le condizioni **(1)** e **(2)** devono essere vere contemporaneamente, scriviamo il sistema

$$\begin{cases} -b(x_1 - x_0) + a(y_1 - y_0) = 0 \\ ax_0 + by_0 + c = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

che risolviamo mediante il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} w = x_1 - x_0 \\ z = y_1 - y_0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_0 = x_1 - w \\ y_0 = y_1 - z \end{cases}. \quad (4)$$

Sostituendo le **(4)** nel sistema **(3)** troviamo

$$\begin{cases} -bw + az = 0 \\ a(x_1 - w) + b(y_1 - z) + c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} az = bw \\ aw + bz = ax_1 + by_1 + c \end{cases}. \quad (5)$$

Ora isoliamo z nella prima equazione a destra e sostituiamo nella seconda:

$$\begin{cases} z = \frac{b}{a}w \\ aw + b\frac{b}{a}w = ax_1 + by_1 + c \end{cases} \implies \begin{cases} z = \frac{b}{a}w \\ \frac{a^2 + b^2}{a}w = ax_1 + by_1 + c \end{cases}. \quad (6)$$

Ora possiamo ricavare w dalla seconda equazione del sistema e poi z della prima:

$$\begin{cases} w = \frac{a}{a^2 + b^2}(ax_1 + by_1 + c) \\ z = \frac{b}{a^2 + b^2}(ax_1 + by_1 + c) \end{cases}. \quad (7)$$

Siamo finalmente in grado di concludere il calcolo:

$$\begin{aligned} d &= \overline{PH} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \sqrt{w^2 + z^2} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2}(ax_1 + by_1 + c)^2 + \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^2}(ax_1 + by_1 + c)^2} = , \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2}(ax_1 + by_1 + c)^2} = \sqrt{\frac{(ax_1 + by_1 + c)^2}{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

che fornisce il risultato

$$d = \overline{PH} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$