ORBITE ELLITTICHE

In un'orbita ellittica indichiamo con $R_a = a + c$ la distanza del corpo all'afelio (apoastro) e con v_a la relativa velocità; con $R_p = a - c$ la distanza del corpo al perielio (periastro) e con v_p la relativa velocità. Come si è visto, i simboli a, b, c, e relativi all'equazione di un'ellisse saranno utilizzati con il loro significato abituale. I simboli M e m indicano, rispettivamente, le masse del Sole (del corpo attorno a cui avviene l'orbita) e del pianeta (del corpo che percorre l'orbita).

Determinazione delle velocità all'apoastro e al periastro
Per la conservazione del momento angolare vale la relazione

$$v_a\,(a+c) = v_p\,(a-c) \qquad \Longrightarrow \qquad v_p = v_a\,\frac{a+c}{a-c} = v_a\,\frac{1+e}{1-e}. \tag{1}$$

Per la conservazione dell'energia meccanica totale vale l'ulteriore relazione

$$\frac{1}{2}m\,v_p^2 - G\frac{m\,M}{a-c} = \frac{1}{2}m\,v_a^2 - G\frac{m\,M}{a+c}$$

che si riscrive

$$v_p^2 - 2G\frac{M}{a-c} = v_a^2 - 2G\frac{M}{a+c}\,. \tag{2}$$

Sostituendo il risultato **(1)** nell'equazione **(2)** e risolvendo per v_a si ottiene il primo risultato

$$v_a^2 = \frac{GM}{a}\,\frac{1-e}{1+e}. \tag{3}$$

Un calcolo diretto permette di verificare che la formula trovata equivale alla più nota relazione

$$v_a^2 = GM\left(\frac{2}{R_a} - \frac{1}{a}\right). \tag{4}$$

Sostituendo la **(3)** nella **(1)** otteniamo anche

$$v_p^2 = \frac{GM}{a}\,\frac{1+e}{1-e}\,, \tag{5}$$

che equivale a

$$v_p^2 = GM\left(\frac{2}{R_p} - \frac{1}{a}\right). \tag{6}$$

Energia meccanica totale
Calcoliamo l'energia totale, per esempio, all'apoastro. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\text{tot}} &= \frac{1}{2}mv_a^2 - G\,\frac{m\,M}{a+c} = \\
&= \frac{1}{2}m\frac{GM}{a}\,\frac{1-e}{1+e} - m\frac{GM}{a}\,\frac{1}{1+e} = \\
&= \frac{G\,m\,M}{2a}\left(\frac{1-e}{1+e} - \frac{2}{1+e}\right) = \\
&= -G\,\frac{m\,M}{2a}
\end{aligned} \tag{7}$$

È interessante notare che la formula **(7)** è del tutto compatibile con il più noto risultato relativo all'orbita circolare.

Momento angolare
Anche il modulo del momento angolare lo calcoliamo all'apoastro. Troviamo:

$$
\begin{aligned}
L = m\, v_a\, R_a &= m\sqrt{\frac{GM}{a}}\,\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\, a\,(1+e) = \\
&= m\sqrt{\frac{GM}{a}}\,\sqrt{\frac{1-e}{1+e}\,(1+e)^2}\, a = m\sqrt{\frac{GM}{a}}\,\sqrt{a^2\,(1-e^2)} = \\
&= m\sqrt{\frac{GM}{a}}\, b\,. \qquad \textbf{(8)}
\end{aligned}
$$

Si può notare che nel caso dell'orbita circolare, in cui si ha $a = b = R$, si trova l'ovvia relazione

$$L = m\sqrt{M\,G\,R}\,.$$

La velocità all'estremo del semiasse minore Per un controllo di coerenza, determiniamo in due modi il modulo della velocità v_B dell'orbita nel punto B che è uno dei vertici relativi ai semiassi minori.

- Dalla conservazione dell'energia abbiamo

  $$\frac{1}{2} m\, v_B^2 - G\,\frac{m\,M}{a} = -G\,\frac{m\,M}{2a} \qquad \Longrightarrow \qquad v_B^2 = -G\,\frac{M}{a} + 2G\,\frac{M}{a}\,.$$

  Si ottiene così la formula

  $$v_B = \sqrt{\frac{GM}{a}} \qquad \textbf{(9)}$$

  che ricalca quella ottenuta per l'orbita circolare.
- Dalla conservazione del momento angolare otteniamo

  $$m\, v_B\, a\, \sin\theta = m\sqrt{\frac{GM}{a}}\, b\,,$$

  dove θ è l'angolo tra il raggio vettore e $\vec{v}_B$.
  Dalla geometria dell'ellisse si vede facilmente che vale $\cos\theta = c/a = e$, per cui si ha $\sin\theta = \sqrt{1-e^2}$. Quindi la formula precedente diviene

  $$
  \begin{aligned}
  v_B &= \sqrt{\frac{GM}{a}}\, b\,\frac{1}{a\sin\theta} = \sqrt{\frac{GM}{a}}\, b\,\frac{1}{a\sqrt{1-e^2}} \\
  &= \sqrt{\frac{GM}{a}}\,\frac{b}{\sqrt{a^2-c^2}} = \sqrt{\frac{GM}{a}}\,\frac{b}{b} = \sqrt{\frac{GM}{a}}\,.
  \end{aligned}
  $$

Abbiamo così ottenuto lo stesso risultato.