ACHILLE E LA TARTARUGA

La serie geometrica

Come è ben noto, se $|q| < 1$ vale la relazione

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1-q}\,. \qquad (*)$$

La situazione

Achille e la tartaruga corrono si un percorso rettilineo, nella stessa direzione e nello stesso verso, con velocità rispettivamente uguali a v_A e v_T ($v_A > v_T > 0$ m/s). Essi partono nello stesso istante (che poniamo come origine dei tempi) e in questa condizione la tartaruga ha un vantaggio L su Achille.

La soluzione cinematica

Scegliamo la posizione iniziale di Achille come origine delle ascisse. Allora la sua equazione del moto è

$$s_A = v_A\, t$$

mentre quella della tartaruga è

$$s_t = L + v_T\, t$$

Come è ovvio, Achille raggiunge la tartaruga all'istante t_R in cui vale la relazione $s_A = s_T$, cioè:

$$v_A\, t_R = L + v_T\, t_R \quad \Rightarrow \quad t_R = \frac{L}{v_A - v_T} \qquad (**)$$

e nella posizione

$$s_R = v_A\, t_R = \frac{v_A}{v_A - v_T}\, L$$

Analisi dell'algoritmo di Zenone

Achille arriva nel punto da cui è partita la tartaruga dopo un intervallo di tempo

$$\Delta t_0 = \frac{L}{v_A};$$

nel frattempo la tartaruga ha percorso la distanza

$$\Delta s_1 = v_T\, \Delta t_0 = \frac{v_T}{v_A}\, L.$$

Achille percorre questa distanza nell'intervallo di tempo

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta s_1}{v_A} = \frac{v_T}{v_A}\, \frac{L}{v_A}.$$

Ancora una volta, nel frattempo la tartaruga ha percorso l'ulteriore distanza

$$\Delta s_2 = v_T \, \Delta t_1 = \frac{v_T{}^2}{v_A} \, L,$$

che Achille percorre nell'ulteriore intervallo di tempo

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta s_2}{v_A} = \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2 \frac{L}{v_A}.$$

Si è quindi capito che Achille insegue la tartaruga impiegando i successivi intervalli di tempo

$$\Delta t_k = \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^k \frac{L}{v_A}\,.$$

Si nota anche che la formula precedente descrive anche, con $k = 0$, l'intervallo di tempo iniziale t_0.

Somma della serie di Zenone

Avendo scelto l'istante di partenza dei due corridori come origine dei tempi, l'istante t_R si dovrebbe ottenere anche come la somma di tutti gli infiniti intervalli di tempo Δt_k. Verifichiamo ciò con il calcolo esplicito.

$$t'_R = \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta t_K = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^k \frac{L}{v_A} = \frac{L}{v_A} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^k\,. \qquad (***)$$

La sommatoria infinita che compare nella formula precedente è una serie armonica di ragione

$$q = \frac{v_T}{v_A} \qquad \text{con, in base alle ipotesi sulle velocità} \qquad 0 < q < 1\,.$$

Così, in base alla formula $(*)$, otteniamo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{v_T}{v_A}} = \frac{v_A}{v_A - v_T}\,.$$

Sostituendo questo risultato nella formula $(***)$ si ottiene

$$t'_R = \frac{L}{v_A} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^k = \frac{L}{v_A} \frac{v_A}{v_A - v_T} = \frac{L}{v_A - v_T}\,.$$

Confrontando questo risultato con la formula $(**)$, è evidente che $t'_R = t_R$. L'algoritmo di calcolo cambia, ma il risultato rimane lo stesso.