Volumi di solidi di rotazione attorno all'asse delle ordinate

Premessa

Consideriamo una funzione $f(x)$ definita e continua nell'intervallo $[a,\ b]$. Per fissare le idee, in questa trattazione consideriamo che in $[a,\ b]$ la funzione $f(x)$ sia non negativa, come è mostrato nella figura a lato.

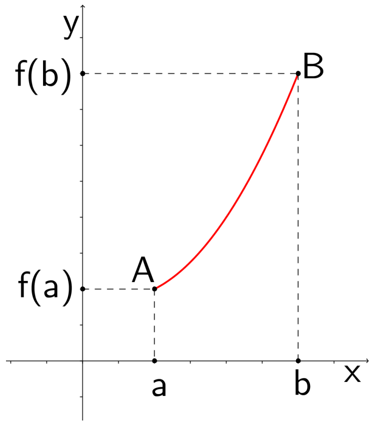

Figura 1

Consideriamo ora il trapezoide $\mathcal{T}$ delimitato dall'asse x, dall'arco AB del grafico di $f(x)$ e dalle due rette verticali $x = a$ e $x = b$. È noto che il volume $\mathcal{V}$ del solido di rotazione, ottenuto facendo ruotare il trapezoide $\mathcal{T}$ di un giro completo attorno all'asse x, è dato dalla formula:

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx. \tag{1}$$

La formula (1) è il punto di partenza, sulla base del quale saranno dimostrate le altre due formule rilevanti per i volumi di rotazione.

Caso 1: volume del solido di rotazione «interno»

Supponiamo che nell'intervallo $[a,\ b]$ la funzione $y = f(x)$ sia crescente (e quindi invertibile) e indichiamo con $x = f^*(x)$ la sua funzione inversa, per la quale vale la relazione

$$f^*(f(x)) = x, \quad \forall c \in [a,\ b]. \tag{2}$$

Consideriamo inoltre il secondo trapezoide $\mathcal{T}^*$, delimitato dall'asse delle ordinate, dallo stesso arco AB di $f(x)$ (oppure di $f^*(y)$) e dalle rette verticali di equazioni $y = f(a)$ e $y = f(b)$. Siamo interessati a determinare il volume $\mathcal{V}^*$ del solido di rotazione che si ottiene operando una rotazione completa di $\mathcal{T}^*$ attorno all'asse y.

In accordo con la formula (1), tale volume si ottiene con la formula:

$$\mathcal{V}^* = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} [f^*(y)]^2\, dy. \tag{3}$$

Per ottenere un'espressione che è spesso più maneggevole, operiamo nell'integrale (3) la sostituzione

$$y = f(x) \quad \Rightarrow \quad dy = f'(x)\, dx \ \wedge \ x = f^*(y). \tag{4}$$

In questo modo dalla (3) otteniamo

$$\mathcal{V}^* = \pi \int_{f^*(f(a))}^{f^*(f(b))} [f^*(f(x))]^2 \; f'(x) \; dx,$$

che, sulla base della proprietà (2), diventa:

$$\mathcal{V}^* = \pi \int_a^b x^2 \, f'(x) \; dx. \tag{5}$$

L'espressione ottenuta è convincente perché, essendo la funzione $f(x)$ crescente per ipotesi, la sua derivata prima risulta positiva. Così la funzione integranda che compare in essa è positiva ne consegue il calcolo di un volume positivo, come deve essere.

Se la funzione $f(x)$ fosse decrescente, mantenendo la condizione $a < b$ la formula (3) diventerebbe

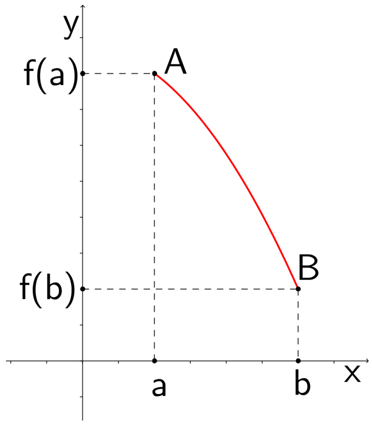

Figura 2

$$\mathcal{V}^* = \pi \int_{f(b)}^{f(a)} [f^*(y)]^2 \, dy\,, \tag{6}$$

per cui l'integrale (5) assumerebbe la forma

$$\mathcal{V}^* = \pi \int_b^a x^2 \, f'(x) \; dx = \pi \int_a^b x^2 \, [-f'(x)] \; dx\,. \tag{7}$$

Mettendo insieme i risultati (5) e (7), giungiamo quindi al risultato conclusivo:

$$\mathcal{V}^* = \pi \int_a^b x^2 \, |f'(x)| \; dx\,. \tag{8}$$

La formula sopra è la prima relazione rilevante che si intendeva dimostrare.

Caso 2: volume del solido di rotazione «esterno»

Torniamo ora a considerare il trapezoide $\mathcal{T}$; vogliamo ora calcolare il volume $\mathcal{V}'$ del solido di rotazione che si ottiene facendo compiere a $\mathcal{T}$ una rotazione completa attorno all'asse delle y. Ragionando sulla Figura 1 si vede che tale volume è uguale al volume del cilindro (con asse di simmetria sull'asse y) di raggio b e altezza $f(b)$, a cui sono sottratti il solido di volume $\mathcal{V}^*$ calcolato sopra e il cilindro coassiale ma più piccolo di raggio a e altezza $f(a)$. In formula:

$$\mathcal{V}' = \pi b^2 f(b) - \mathcal{V}^* - \pi a^2 f(a). \tag{9}$$

Sostituendo la (5) nella (9) si ottiene

$$\mathcal{V}' = \pi \left[b^2 f(b) - a^2 f(a) - \int_a^b x^2\, f'(x)\; dx \right] . \tag{10}$$

Ora conviene integrare per parti l'integrale definito al membro di destra dell'equazione precedente, ottenendo:

$$\begin{aligned} \int_a^b x^2\, f'(x)\; dx &= \left[x^2 f(x) \right]_a^b - \int_a^b 2x f(x)\, dx = \\ &= b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2 \int_a^b x f(x)\, dx \, . \end{aligned}$$

Sostituendo quest'ultima espressione nell'equazione precedente possiamo calcolare

$$\mathcal{V}' = \pi \left[b^2 f(b) - a^2 f(a) - b^2 f(b) + a^2 f(a) + 2 \int_a^b x f(x)\, dx \right] .$$

Eliminati i termini che si elidono due a due, otteniamo quindi la seconda relazione cercata:

$$\mathcal{V}' = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx \, . \tag{11}$$

Bisogna ora esaminare il caso in cui $f(x)$ sia decrescente in $[a,\ b]$: esaminando la Figura 2 si vede che, in questo secondo caso, tale solido di rotazione è ottenuto unendo il cilindro di raggio b e altezza $f(b)$ con il solido di volume $\mathcal{V}'$ e togliendo da questo insieme il cilindro di raggio a e altezza $f(a)$.

Tenendo conto della formula (7), la descrizione precedente si riduce alla relazione:

$$\mathcal{V}' = \pi \left[b^2 f(b) - a^2 f(a) + \int_a^b x^2 \left[-f'(x) \right]\, dx \right] . \tag{12}$$

La formula precedente risulta identica alla (10); per questa ragione la formula (11) – derivata dalla (10) – è dimostrata in entrambi i casi. E quindi vale per una generica funzione $f(x)$, suddivisa nei suoi intervalli di monotonìa.