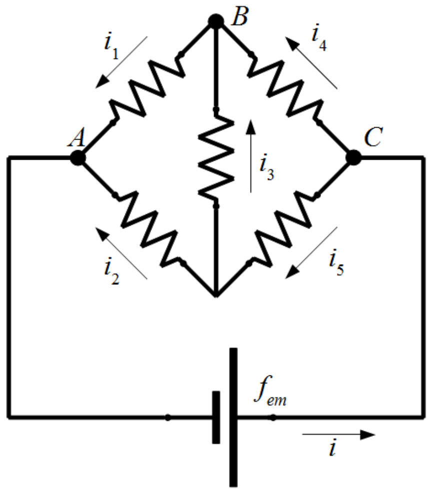
Risoluzione di una rete di resistenze

Caso di cinque resistenze uguali

L'analisi di un circuito mediante reistenze in serie o in parallelo tra loro è uno strumento concettuale molto potente ma, anche nel caso di circuiti che contengono un solo generatore, non esaurisce tutti i casi possibili.

Il circuito a lato contiene cinque resistori uguali, di resistenza R, e un generatore che mantiene una forza elettromotrice costante di valore f_{em}.



In questo circuito le resistenze non sono né in serie, né in parallelo tra loro, e quindi per la risoluzione de problema dovremo fare ricorso alle leggi di Kirchhoff, che applicheremo a tre nodi e a tre maglie, in quanto lo schema contiene le sei intensità di corrente incognite i, i_1, i_2, i_3, i_4 e i_5.

Cominciamo con lo scrivere tre equazioni, che si ottengono rispettivamente dai nodi A, B e C:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = i & \text{(Nodo } A\text{)} \\ i_3 + i_4 = i_1 & \text{(Nodo } B\text{)} \\ i_4 + i_5 = i & \text{(Nodo } C\text{)} \end{cases}$$

Altre tre equazioni provengono, per esempio, dalla maglia che coinvolge le correnti i, i_5 e i_2:

$$f_{em} - R\,i_5 - R\,i_2 = 0 \quad \text{(Maglia 1)},$$

da quella che coinvolge le correnti i, i_4 e i_1:

$$f_{em} - R\,i_4 - R\,i_1 = 0 \quad \text{(Maglia 2)}$$

e da quella che coinvolge le correnti i, i_5, i_3 e i_1:

$$f_{em} - R\,i_5 - R\,i_3 - R\,i_1 = 0 \quad \text{(Maglia 3)}$$

Dividendo queste ultime tre equazioni per R e riarrangiando i termini, otteniamo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = i & \text{(Nodo } A\text{)} \\ i_3 + i_4 = i_1 & \text{(Nodo } B\text{)} \\ i_4 + i_5 = i & \text{(Nodo } C\text{)} \\ i_2 + i_5 = \frac{f_{em}}{R} & \text{(Maglia 1)} \\ i_1 + i_4 = \frac{f_{em}}{R} & \text{(Maglia 2)} \\ i_1 + i_3 + i_5 = \frac{f_{em}}{R} & \text{(Maglia 3)} \end{cases}$$

Cerchiamo di risolvere il sistema in una maniera conveniente; quindi confrontiamo l'equazione (Nodo A) con quella (Nodo C) e otteniamo

$$i_1 + i_2 - i_4 - i_5 = 0\,;$$

inoltre, confrontando l'equazione (Maglia 1) con la (Maglia 2) si ottiene

$$i_1 + i_4 - i_2 - i_5 = 0\,.$$

Sommando queste ultime due equazioni membro a membro si ottiene la relazione

$$i_5 = i_1\,,$$

mentre sottraendole membro a membro si trova

$$i_4 = i_2\,.$$

Ciò permette di semplificare il sistema precedente, che diventa così:

$$\begin{cases} i_5 = i_1 & \text{(E1)} \\ i_4 = i_2 & \text{(E2)} \\ i_2 + i_3 = i_1 & \text{(E3)} \\ i_1 + i_2 = i & \text{(E4)} \\ i_1 + i_2 = \frac{f_{em}}{R} & \text{(E5)} \\ 2\,i_1 + i_3 = \frac{f_{em}}{R} & \text{(E6)} \end{cases}$$

Nelle equazioni (E4) ed (E5) i primi membri sono uguali; quindi devono essere uguali tra loro anche i secondi membri. Ciò porta a determinare i:

$$i = \frac{f_{em}}{R}\,.$$

Inoltre, è possibile ricavare i_3 nell'equazione (E3) e sostituirne il valore nella (E6); in questo modo il sistema diventa:

$$\begin{cases} i_5 = i_1 & \text{(E1)} \\ i_4 = i_2 & \text{(E2)} \\ i_3 = i_1 - i_2 & \text{(E3)} \\ i = \frac{f_{em}}{R} & \text{(E7)} \\ i_1 + i_2 = \frac{f_{em}}{R} & \text{(E5)} \\ 3\,i_1 - i_2 = \frac{f_{em}}{R} & \text{(E8)} \end{cases}$$

Sommando membro a membro le equazioni (E8) ed (E5) si trova

$$i_1 = \frac{f_{em}}{2R}\,,$$

mentre sottraendole si ottiene

$$i_2 = i_1\,.$$

Quest'ultimo risultato, poi, può essere sostituito nell'equazione (E3) in modo da trovare

$$i_3 = 0\,.$$

Quindi abbiamo finalmente risolto il sistema in esame, ottenendo la soluzione:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{f_{em}}{2R} \\ i_2 = \frac{f_{em}}{2R} \\ i_3 = 0 \\ i_4 = \frac{f_{em}}{2R} \\ i_5 = \frac{f_{em}}{2R} \\ i = \frac{f_{em}}{R} \end{cases}$$

Come controllo di consistenza, notiamo che il valore trovato per i implica che l'intera rete di resistori ha una resistenza equivalente pari a R. In effetti, visto che l'intensità i_3 è nulla, è come se il corrispondente ramo non ci fosse: ma allora si ottiene proprio una rete che ha una resistenza equivalente pari a R.

Caso di cinque resistenze diverse

Per completare la trattazione consideriamo il caso generale, in cui le cinque resistenze che compaiono nello schema di pag. 1 sono tutte diverse tra loro. Come al solito, indichiamo con R_1 la resistenza attraverso cui passa la corrente i_1 e così via. Allora il sistema da risolvere diviene:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = i & \text{(Nodo } A\text{)} \\ i_3 + i_4 = i_1 & \text{(Nodo } B\text{)} \\ i_4 + i_5 = i & \text{(Nodo } C\text{)} \\ R_2\, i_2 + R_5\, i_5 = f_{em} & \text{(Maglia 1)} \\ R_1\, i_1 + R_4\, i_4 = f_{em} & \text{(Maglia 2)} \\ R_1\, i_1 + R_3\, i_3 + R_5\, i_5 = f_{em} & \text{(Maglia 3)} \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare di sei equazioni in sei incognite che risulta determinato. Utilizzando per esempio un software di manipolazione simbolica è possibile ottenere in modo rapido la sua soluzione, che è:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{f_{em}\,(R_3\,R_5+R_2\,R_5+R_2\,R_4+R_2\,R_3)}{R_3\,R_4\,R_5+R_2\,R_4\,R_5+R_1\,R_4\,R_5+R_1\,R_3\,R_5+R_1\,R_2\,R_5+R_2\,R_3\,R_4+R_1\,R_2\,R_4+R_1\,R_2\,R_3} \\ i_2 = \frac{f_{em}\,(R_1\,R_5+R_3\,R_4+R_1\,R_4+R_1\,R_3)}{R_3\,R_4\,R_5+R_2\,R_4\,R_5+R_1\,R_4\,R_5+R_1\,R_3\,R_5+R_1\,R_2\,R_5+R_2\,R_3\,R_4+R_1\,R_2\,R_4+R_1\,R_2\,R_3} \\ i_3 = \frac{f_{em}\,(R_2\,R_4-R_1\,R_5)}{R_3\,R_4\,R_5+R_2\,R_4\,R_5+R_1\,R_4\,R_5+R_1\,R_3\,R_5+R_1\,R_2\,R_5+R_2\,R_3\,R_4+R_1\,R_2\,R_4+R_1\,R_2\,R_3} \\ i_4 = \frac{f_{em}\,(R_3\,R_5+R_2\,R_5+R_1\,R_5+R_2\,R_3)}{R_3\,R_4\,R_5+R_2\,R_4\,R_5+R_1\,R_4\,R_5+R_1\,R_3\,R_5+R_1\,R_2\,R_5+R_2\,R_3\,R_4+R_1\,R_2\,R_4+R_1\,R_2\,R_3} \\ i_5 = \frac{f_{em}\,(R_3\,R_4+R_2\,R_4+R_1\,R_4+R_1\,R_3)}{R_3\,R_4\,R_5+R_2\,R_4\,R_5+R_1\,R_4\,R_5+R_1\,R_3\,R_5+R_1\,R_2\,R_5+R_2\,R_3\,R_4+R_1\,R_2\,R_4+R_1\,R_2\,R_3} \\ i = \frac{f_{em}\,(R_3\,R_5+R_2\,R_5+R_1\,R_5+R_3\,R_4+R_2\,R_4+R_1\,R_4+R_2\,R_3+R_1\,R_3)}{R_3\,R_4\,R_5+R_2\,R_4\,R_5+R_1\,R_4\,R_5+R_1\,R_3\,R_5+R_1\,R_2\,R_5+R_2\,R_3\,R_4+R_1\,R_2\,R_4+R_1\,R_2\,R_3} \end{cases}$$

Notiamo che la corrente i_3 è nulla se vale $R_2\,R_4 = R_1\,R_5$. Se si ha $R_2\,R_4 > R_1\,R_5$ il valore di i_3 risulta positivo e quindi il verso della corrente è quello indicato nella schema circuitale di pag. 1; in caso contrario il verso della corrente è quello opposto.