

Risolvi uno dei seguenti problemi

Problema 1 In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani Oxy , sono assegnate le parabole di equazione

$$y = (a - 1)x^2 - 2ax + a^2$$

dove a è un parametro reale diverso da 1.

- Determinare quali tra esse hanno punti in comune con l'asse x e quali no.
- Trovare le due parabole che hanno il vertice in un punto di ascissa a .
- Stabilire se le due parabole trovate sono congruenti o no, fornendo un'esauriente spiegazione della risposta.
- Scrivere l'equazione del luogo geometrico \mathcal{L} dei vertici delle parabole assegnate e disegnarne l'andamento dopo averne determinato in particolare asintoti, estremi e flessi.
- Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva \mathcal{L} e dalla retta di equazione $y = 3/2$.

Problema 2 Una circonferenza \mathcal{C} ha il centro sull'asse x e passa per i punti $A(9; 0)$ e $B(0; 12)$.

- Scrivi l'equazione di tale circonferenza.
- Indica con P un punto della circonferenza che appartiene al primo quadrante e indica con t l'ascissa di P . Determina t in modo che sia massima l'area del quadrilatero $OAPB$. Calcola il valore numerico di tale area massima.
- Considera di nuovo il punto P variabile sull'arco di \mathcal{C} che appartiene al primo quadrante. Dall'origine si conduce un segmento OV perpendicolare al piano xy con $\overline{OV} = \frac{28}{3} + t$. Determina per quale valore di t è massimo il volume della piramide $OAPV$.
- Considera i punti P e V individuati nella soluzione della domanda c). Indica con r la retta che passa per A e per P e calcola la distanza tra l'origine O e la retta r . Utilizza tale informazione per calcolare l'area della faccia APV della piramide $OAPV$.
- Sulla base del risultato appena ottenuto, calcola il seno dell'angolo $P\hat{V}A$.

Rispondi in modo completo a cinque tra i seguenti dieci quesiti

I

II Per una funzione $f(x)$, spiega quale relazione logica esiste tra le due proposizioni “la funzione è continua per $x = x_0$ ” e “la funzione è derivabile per $x = x_0$ ”.

III Enuncia e dimostra il teorema di Rolle.

IV Enuncia e dimostra il teorema della media.

V Calcola il seguente integrale indefinito:

VI Determina il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \operatorname{sen} x - 6x - x^3}{e^x - \cos x - x}.$$

VII

VIII Data la curva $y = \sqrt{x^2 - 1}$, calcola il volume \mathcal{V}_1 del solido generato da una rotazione dell'arco di curva compreso nell'intervallo $[1; 5]$ attorno all'asse x .

IX

X Calcola numericamente il valore di $\operatorname{arctg}(0, 2)$ fino al terzo ordine di approssimazione. Confronta il valore ottenuto con quello che ricavi dalla calcolatrice.