LICEO SCIENTIFICO STATALE “G. MARCONI”
Via della Costituente, 4/A – 43100 PARMA
Tel +39.0521.282.043 - Fax +39.0521.231.353
Sito web: www.lmarconi.pr.it E-mail: marconi@lmarconi.pr.it

Simulazione della seconda prova dell'Esame di Stato - 26.05.2009

Corso sperimentale

Risolvi uno dei seguenti problemi.

Problema 1

In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani Oxy, è assegnato il fascio di parabole di equazione

$$y = ax^2 + 2(1-2a)x - 5a - 10$$

con $a \neq 0$.

a) Si determini l’equazione cartesiana del luogo Γ descritto dai vertici delle parabole del fascio al variare del parametro a.

b) Stabilito che l’equazione di Γ è

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 10x + 25}{x-2}$$

si studi il grafico di tale luogo.

c) Si calcoli l’area $F(t)$ della regione di piano compresa tra l’asse delle ascisse, il grafico di $f(x)$ e le due ascisse $x = 4$ e $x = 4 + t$, con $t > 0$.

d) Verificato che vale

$$F(t) = \frac{1}{2}t^2 - 4t + 9\ln\left(\frac{t+2}{2}\right)$$

si spieghi perché, per $t > 0$, $F(t)$ è senz’altro una funzione crescente.

e) Si verifichi che vale $F(5) \approx 3{,}775$ e $F(6) \approx 6{,}477$. Su tale base si determini, con un errore $\Delta t = 0{,}1$, per quale valore t_0 si ha $F(t_0) = 6$.

Problema 2

Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, si prenda sul prolungamento di AB, dalla parte di B, un punto C tale che sia $BC \cong AB$.
Essendo P un punto sulla semicirconferenza:

a) Si esprima per mezzo di r e dell’ampiezza dell’angolo $x = A\hat{B}P$ il rapporto $y = \dfrac{\overline{CP}^2}{\overline{AP} \cdot \overline{PB}}$.

b) Verificato che il rapporto y, espresso per mezzo di tgx, è $y = f(x) = \dfrac{tg^2x + 4}{tgx}$, si studi la funzione ottenuta nell’intervallo $[0, 2\pi]$.

c) Si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) il valore di x nell’intervallo $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ per cui il rapporto y assume valore minimo.

d) Si calcoli l’area della regione finita di piano delimitata dalla curva rappresentativa della funzione $y = f(x)$, dall’asse delle ascisse e dalle rette di equazione $x = \dfrac{\pi}{4}$ e $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Rispondi in modo completo a cinque tra i seguenti dieci quesiti

1) Discutere al variare dei parametri a e b il seguente sistema lineare: $\begin{cases} ax+y-z=1 \\ 2x+y-(a+1)z=2 \\ x+y-az=1 \end{cases}$

2) Nel triangolo ABC si ha che: $\overline{AB}=2a$, $\overline{AC}=3a$, $B\hat{A}C=\frac{\pi}{3}$. Indicato con M il punto medio del lato AB, sia P un punto del lato AC. Posto $\overline{AP}=x$, determinare il valore minimo della funzione $f(x)=\overline{PB}^2+\overline{PM}^2$.

3) A e B sono due eventi indipendenti; di essi si sa che la probabilità che si verifichi A è uguale a $\frac{1}{3}$ mentre la probabilità che si verifichi B è $\frac{3}{5}$. Qual è la probabilità che non si verifichi nessuno dei due eventi?

4) Quale significato attribuisci al simbolo $\binom{n}{k}$? Esiste un *k* tale che $\binom{10}{k}=\binom{10}{k-2}$?

5) Dimostrare che la funzione $f:[-1,1]\to \mathbb{R}$ / $y=arctgx+x^3$ è dotata di funzione inversa $f^{-1}(y)$, definita su un intervallo che deve essere determinato. Dimostrare che la f^{-1} è derivabile in ogni punto del suo dominio. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$.

6) Sapendo che $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=5$ e $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=7$, dire se è possibile calcolare $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$ e, in caso affermativo, calcolarlo.

7) Determina il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen3x+sen4x-7x}{x(\cos x-1)}$$

8) Mediante il metodo di integrazione per parti determina il seguente integrale:

$$\int x^5 sen\left(x^2\right)dx$$

9) Una sfera di raggio *r* è lasciata cadere all'istante $t=0$ in un mezzo con coefficiente di viscosità η, partendo dalla posizione $s=0$. All'istante $t>0$ la sua velocità è data dalla funzione

$$v=f\left(t\right)=\frac{k}{6\pi\eta r}\left(1-e^{-\frac{6\pi\eta r}{k}t}\right)$$

(*k* è una costante positiva).

Determina le due funzioni $s\left(t\right)$ e $a\left(t\right)$ che forniscono, rispettivamente, la posizione e l'accelerazione della sfera in funzione del tempo.

10) Enuncia il teorema di Lagrange, verifica se è possibile applicare tale teorema alla funzione:

$$y=\begin{cases} x^2-2x & \text{se } x\le 2 \\ \left|2x-4\right| & \text{se } x>2 \end{cases}$$

nell'intervallo [–1; 6] e trova gli eventuali punti *c* che soddisfano tale teorema.