Liceo Scientifico G. Marconi - Classi 5S – 5T

Simulazione della seconda prova dell'Esame di Stato - 20.05.2003

`Risolvi uno dei seguenti problemi`

Problema A Relativamente alla funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 4x + 5}$$

rispondi alle domande sotto riportate.

1) Determina il dominio, le eventuali simmetrie, le intersezioni con gli assi, il segno della funzione e i suoi eventuali asintoti. Verifica, in particolare, che la funzione ammette un asintoto obliquo.
2) Calcola la derivata prima di $f(x)$, curando di ottenere un numeratore di quarto grado. Dimostra che esistono due estremi relativi; indica con P il massimo relativo e con Q il minimo relativo. Caratterizza il comportamento della funzione nell'origine degli assi.
3) Calcola la derivata seconda di $f(x)$, curando di ottenere un numeratore di terzo grado. Quindi determina gli eventuali flessi della funzione. Alla fine, disegna il grafico della funzione.
4) Calcola l'area della parte finita di piano compresa tra il grafico della funzione, l'asintoto obliquo e la rette verticali che passano per P e per Q.
5) Scrivi un programma nel linguaggio *pascal* che determina, con un errore minore di una parte su 10^6, la posizione dell'ascissa x_0 per cui si ha $f(x_0) = -1$.
6) Disegna il grafico della funzione $g(x) = |f(x)|$. Esistono punti angolosi? Esiste la derivata seconda in $x = 0$?

Problema B Una circonferenza $\mathcal{C}$ ha il centro sull'asse x e passa per i punti $A(1;\,0)$ e $B(0;\,\sqrt{3})$.

1) Scrivi l'equazione di tale circonferenza.
2) Indica con P un punto della circonferenza che appartiene al primo quadrante e indica con t l'ascissa di P. Determina t in modo che sia massima l'area del quadrilatero $OAPB$. Calcola il valore numerico di tale area massima.
3) Considera di nuovo il punto P variabile sull'arco di $\mathcal{C}$ che appartiene al primo quadrante. Dall'origine si conduce un segmento OV perpendicolare al piano xy con $\overline{OV} = \frac{29}{15} + t$. Determina per quale valore di t è massimo il volume della piramide $OAPV$.
4) Considera i punti P e V individuati nella soluzione della domanda 3). Indica con r la retta che passa per A e per P e calcola la distanza tra l'origine O e la retta r. Utilizza tale informazione per calcolare l'area della faccia APV della piramide $OAPV$.

5) Sulla base del risultato appena ottenuto, calcola l'ampiezza dell'angolo $P\hat{A}V$.

`Rispondi in modo completo a cinque tra i seguenti dieci quesiti`

I Date le relazioni

$$\begin{cases} X = (2k+1)x + ky \\ Y = -kx + y \end{cases}$$

a) dire per quali valori di k essa rappresenta una affinità, specificando quando essa risulta diretta o inversa;

b) stabilire se esistono valori di k per i quali il rapporto di affinità è 4 e scrivere tale (o tali) affinità.

c) tra le affinità, individuare le eventuali similitudini.

d) tra le affinità, individuare le eventuali equivalenze.

II Per una funzione $f(x)$, spiega quale relazione logica esiste tra le due proposizioni "la funzione è continua per $x = x_0$" e "la funzione è derivabile per $x = x_0$".

III Enuncia e dimostra il teorema di Lagrange.

IV Enuncia e dimostra il teorema centrale del calcolo integrale.

V Calcola il seguente integrale indefinito:

$$\int e^{2x} \cos x \, dx \, .$$

VI Determina il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{6 \operatorname{sen} x - 6x - x^3}{e^x - \cos x - x} \, .$$

VII Data la curva $\gamma: \; y = -x^2 + 2x - 2$, scrivi l'equazione della parabola γ', simmetrica di γ rispetto a $y = 1$ e calcola l'area della regione finita di piano delimitata da γ, γ' e dalle rette $x = 0$ e $x = 3$.

VIII Data la curva $y = \sqrt{x^2 - 1}$, calcola il volume $\mathcal{V}_1$ del solido generato da una rotazione dell'arco di curva compreso nell'intervallo $[1; 5]$ attorno all'asse x e il volume $\mathcal{V}_2$ del solido generato da una rotazione dello stesso arco attorno all'asse y; calcola inoltre il valore del rapporto $\mathcal{V}_2/\mathcal{V}_1$.

IX Considera il sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ kx + 3y + 5z = -8 \end{cases} .$$

Stabilisci per quali valori di k esso è determinato e risolvilo nel caso $k = 0$.

X Calcola numericamente il valore di $\arctan(1{,}1)$ fino al terzo ordine di approssimazione. Confronta il valore ottenuto con quello che ricavi dalla calcolatrice.