Liceo Scientifico G. Marconi - Classe 5S

VERIFICA SCRITTA DI MATEMATICA - 01.10.2013

COMPITO A

Esercizio A.1 È dato l'angolo $\alpha = \arccos(-1/4)$. Calcola il valore di $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{tg}(\alpha/2)$ e $\cos(\alpha + \pi/3)$. [$\sqrt{15}/4$, $\sqrt{15}/4$, $-(1+3\sqrt{5})/8$]

Esercizio A.2 Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche:

$$\cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x - \sqrt{3} < 0\,; \qquad 3\operatorname{tg}^2 x - (\sqrt{3} - 3)\operatorname{tg} x - \sqrt{3} < 0$$

[$\pi/2+2k\pi<x<13/6+2k\pi$; $-\pi/4+k\pi<x<\pi/6+k\pi$]

Esercizio A.3 Il triangolo isoscele ABC ha la base $\overline{AB} = 6l$ e gli angoli alla base di ampiezza x. D è un punto della base tale che $\overline{DB} = 2l$. Da D traccia una retta perpendicolare ad AB, che interseca in P il lato CB e in Q il prolungamento del lato AC.

Determina l'angolo x in modo che valga la relazione $\sqrt{3}\,\overline{PQ} + \overline{PB} = 10l$. [$\pi/3$]

Esercizio A.4 Risolvi i seguenti esercizi:

$$24 \cdot \frac{9^x}{4^x} - 97 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 54 = 0\,, \qquad \log^2_{1/4}(x-1) - \log_{1/4}(x-1) - 6 > 0\,.$$

[1, 3; $1<x<65/64 \vee x>17$]

Esercizio A.5 Stabilisci se il seguente sistema lineare è determinato, indeterminato o impossibile; in caso che sia indeterminato, indicare quante soluzioni ammette.

$$\begin{cases} 3x - 2y + t = -3 \\ x + 4y - z = 2 \\ 14y - t - 3z = 9 \\ 7x + 2t - z = -4 \end{cases}$$

[∞^2]

Esercizio A.6 (Speciale) Nel piano cartesiano è data la seguente trasformazione (detta *similitudine invertente con centro l'origine*):

$$\Sigma_- : \quad \begin{cases} x' = px + qy \\ y' = qx - py \end{cases} \qquad pq \neq 0\,.$$

Dimostra che:

a. il rapporto tra la lunghezza di qualunque segmento nel piano e quella del trasformato sotto Σ_- dello stesso segmento è uguale a $1/\sqrt{|\det(\Sigma_-)|}$;

b. qualunque circonferenza con centro nell'origine viene trasformata da Σ_- in una seconda circonferenza con il raggio moltiplicato per $\sqrt{|\det(\Sigma_-)|}$.

Buon Lavoro!

Liceo Scientifico G. Marconi - Classe 5S

VERIFICA SCRITTA DI MATEMATICA - 01.10.2013

COMPITO B

Esercizio B.1 È dato l'angolo $\alpha = \operatorname{arcsen}(-2/7)$. Calcola il valore di $\cos\alpha$, $\cos(\alpha/2)$ e $\operatorname{sen}(\alpha - \pi/4)$. [$3\sqrt{5}/7$, $\sqrt{(7+3\sqrt{5})/14}$, $-\sqrt{2}(2+3\sqrt{5})/14$]

Esercizio B.2 Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche:

$$\cos x - \operatorname{sen} x + 1 > 0\,; \qquad \operatorname{tg}^2 x + (\sqrt{3}-1)\operatorname{tg} x - \sqrt{3} < 0\,.$$

[$-\pi+2k\pi<x<\pi/2+2k\pi$; $-\pi/3+k\pi<x<\pi/4+k\pi$]

Esercizio B.3 Il triangolo isoscele ABC ha la base $\overline{AB} = 12d$ e gli angoli alla base di ampiezza x. P è un punto della base tale che $\overline{AP} = 4d$. Da P traccia una retta r perpendicolare ad AB, che interseca in R il lato AC e in S la parallela ad AB passante per C.

Determina l'angolo x in modo che valga la relazione $\sqrt{3}\,\overline{RC} + 2\overline{RS} = 8\sqrt{3}d$. [$\pi/3$]

Esercizio B.4 Risolvi i seguenti esercizi:

$$1250 \cdot \frac{4^x}{25^x} - 3157 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + 80 = 0\,, \qquad \log^2_{1/3}(x+1) - 3\,\log_{1/3}(x+1) - 4 < 0\,.$$

[-1, 4; $-80/81<x<2$]

Esercizio B.5 Stabilisci se il seguente sistema lineare è determinato, indeterminato o impossibile; in caso che sia indeterminato, indicare quante soluzioni ammette.

$$\begin{cases} 2x + 3y - t = 4 \\ 3x - 5y + z = -3 \\ 19y - 3t - 2z = 18 \\ 19x - 5t + 3z = 11 \end{cases}$$

[∞^2]

Esercizio B.6 (Speciale) Nel piano cartesiano è data la seguente trasformazione (detta *similitudine diretta con centro l'origine*):

$$\Sigma_+ : \quad \begin{cases} x' = px - qy \\ y' = qx + py \end{cases} \qquad pq \neq 0\,.$$

Dimostra che:

a. il rapporto tra la lunghezza di qualunque segmento nel piano e quella del trasformato sotto Σ_+ dello stesso segmento è uguale a $1/\sqrt{\det(\Sigma_+)}$;

b. qualunque circonferenza con centro nell'origine viene trasformata da Σ_+ in una seconda circonferenza con il raggio moltiplicato per $\sqrt{\det(\Sigma_+)}$.

Buon Lavoro!