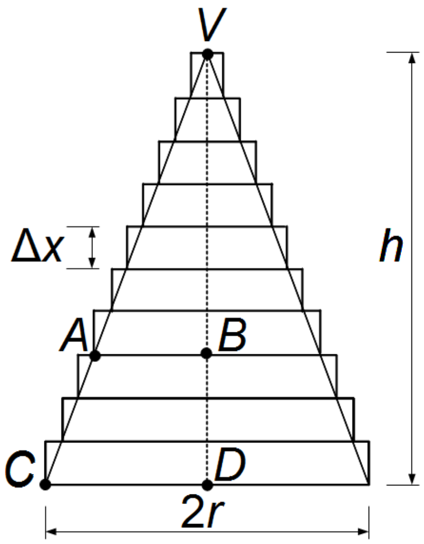
Calcolo del volume del cono

Impostazione del metodo

Dato un cono di raggio di base r e altezza h, approssimiamo il suo volume con quello di n dischetti sovrapposti, ciascuno di altezza

$$\Delta x = \frac{h}{n} \tag{1}$$



Indichiamo con r_k il raggio del dischetto numero k (contando dall'altro). Per esempio, nel disegno a fianco (costruito con $n = 10$ dischetti) il segmento AB rappresenta il raggio r_7 e la lunghezza del segmento BV è $7\,\Delta x = 7/n$.

I due triangoli ABV e CDV sono simili per il primo criterio di similitudine perché hanno entrambi un angolo retto e, inoltre, hanno l'angolo $B\widehat{V}A$ in comune. Quidi vale la relazione

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BV}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DV}}\,,$$

da cui si ottiene

$$r_7 = \overline{AB} = \overline{BV}\,\frac{\overline{CD}}{\overline{DV}} = 7\,\frac{\cancel{h}}{n}\frac{r}{\cancel{h}} = 7\frac{r}{n}\,. \tag{2}$$

In modo del tutto analogo, il raggio r_k del disco numero k (con un valore generico di n, non necessariamente uguale a 10) risulta:

$$r_k = k\frac{r}{n}\,. \tag{3}$$

Calcolo del volume approssimato

Con i dati ottenuti nel paragrafo precedente possiamo ora calcolare il volume $\mathcal{V}_k$ del dischetto numero k, che ha il raggio di base dato dalla formula (3) e l'altezza fornita dall'espressione (3):

$$\mathcal{V}_k = \pi\,r_k^2\,\Delta x = \pi k^2\,\frac{r^2}{n^2}\,\frac{h}{n} = \pi\,\frac{r^2\,h}{n^3}\,k^2\,. \tag{4}$$

Indichiamo ora con V_n l'approssimazione del volume del cono ottenuta sommando i volumi di n dischetti che approssimano il cono. Si ha:

$$\begin{aligned} V_n &= \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \ldots + \mathcal{V}_n \\ &= \pi\,\frac{r^2\,h}{n^3}\,1^2 + \pi\,\frac{r^2\,h}{n^3}\,2^2 + \ldots + \pi\,\frac{r^2\,h}{n^3}\,n^2 \\ &= \pi\,\frac{r^2\,h}{n^3}\,(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = \pi\,\frac{r^2\,h}{n^3}\,\sum_{k=1}^{n} k^2\,. \end{aligned}$$

Prendendo quindi il primo e l'ultimo termine della precedente catena di uguaglianze si trova, quindi:

$$V_n = \pi \, \frac{r^2 \, h}{n^3} \, \sum_{k=1}^{n} k^2 \, . \tag{5}$$

È noto che vale la relazione

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} \, , \tag{6}$$

per cui l'espressione (5) diviene

$$\begin{aligned} V_n &= \pi \, \frac{r^2 \, h}{n^3} \, \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \pi \, \frac{r^2 \, h}{n^{\cancel{3}2}} \, \frac{\cancel{n}(2n^2 + 3n + 1)}{6} \\ &= \pi \, \frac{r^2 \, h}{n^2} \, \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} \\ &= \pi \, r^2 \, h \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) \, . \end{aligned} \tag{7}$$

Abbiamo così trovato il volume della pila di n cilindretti che approssima il cono; ma c'è sempre una differenza tra questo volume e quello del cono. Questa differenza diviene però sempre più piccola a mano a mano che aumenta il numero di cilindretti e diventa nulla nel limite in cui il numero n cresce all'infinito ($n \to +\infty$).

Le due grandezze $1/2n$ e $1/6n^2$ diventano sempre più piccole al crescere di n e si annullano rigorosamente quando n tende a essere infinitamente grande. Così, il volume V del cono, ottenuto dal valore (7) quando n cresce senza limite, diviene

$$V = \frac{\pi}{3} \, r^2 \, h \tag{8}$$

Commenti finali

- Con un metodo del tutto analogo si dimostra che il volume V_P di una piramide, con area di base A_b e altezza h, è:

$$V_P = \frac{1}{3} \, A_b \, h \tag{9}$$

- Nel programma di quinta (o anche alla fine del programma di quarta) si dimostra che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \, .$$

  Con questi due risultati il calcolo precedente è concluso in modo rigoroso.