Volume del tronco di piramide e del tronco di cono

Premessa

Sui vari testi ho sempre visto ricavare la formula del volume del tronco di piramide con metodi che richiedevano la determinazione del volume della piramide "integra", poi del volume della piramide più piccola ed infine la sottrazione dei due volumi trovati in modo da ottenere quello del tronco di piramide.

Voglio invece mostrare che tutto ciò che serve per determinare tale formula sono le relazioni di proporzionalità tra i volumi e quelle tra le aree corrispondenti: come si vedrà, tali relazioni sono in grado di determinare in modo univoco il volume richiesto.

Caso generale

Consideriamo quindi un tronco di piramide che ha la base maggiore di area A e quella minore di area A_1, mentre h è la distanza tra i piani (paralleli) che contengono le due basi.

Il tronco di piramide si può pensare ottenuto da una piramide "originale" di volume V, a cui è stata sottratta la parte superiore, di volume V_1 e di altezza x. Con questa notazione, l'altezza della piramide "integra" è $x + h$, per cui si ha:

$$V = \frac{1}{3}\, A\,(x+h) \tag{1}$$

Per similitudine valgono le seguenti proporzioni:

$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{x}{x+h}\right)^3 \tag{2}$$

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{x}{x+h}\right)^2 \tag{3}$$

L'equazione 3 sarà usata nei calcoli anche nella forma

$$\frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A}} = \frac{x}{x+h} \tag{4}$$

Allora possiamo iniziare a calcolare il volume V_T del tronco di piramide, con il valore di V_1 ricavato dall'equazione 2:

$$V_T = V - V_1 = V - V\,\left(\frac{x}{x+h}\right)^3 = V\,\left[1 - \frac{x^3}{(x+h)^3}\right]$$

Utilizzando la relazione 4 possiamo allora scrivere

$$V_T = V\,\left[1 - \frac{x^3}{(x+h)^3}\right] = V\,\left[1 - \frac{\sqrt{A_1^3}}{\sqrt{A^3}}\right] = V\,\frac{\sqrt{A^3} - \sqrt{A_1^3}}{\sqrt{A^3}}$$

Ora sostituiamo al posto di V l'espressione 1 e sviluppiamo la differenza di cubi al numeratore della frazione, in modo da ottenere

$$\begin{aligned}
V_T &= V\,\frac{\sqrt{A^3}-\sqrt{A_1^3}}{\sqrt{A^3}} = \frac{1}{3}\cancel{A}(x+h)\frac{\left(\sqrt{A}-\sqrt{A_1}\right)\left(A+\sqrt{A\,A_1}+A_1\right)}{\cancel{A}\sqrt{A}} = \\
&= \frac{1}{3}(x+h)\left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A}}-\frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A}}\right)\left(A+\sqrt{A\,A_1}+A_1\right) = \\
&= \frac{1}{3}(x+h)\left(1-\frac{x}{x+h}\right)\left(A+\sqrt{A\,A_1}+A_1\right) = \\
&= \frac{1}{3}\cancel{(x+h)}\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{\cancel{x+h}}\left(A+\sqrt{A\,A_1}+A_1\right)
\end{aligned}$$

Prendendo il primo e l'ultimo termine di questa catena di uguaglianze troviamo la formula che fornisce il volume del tronco di cono:

$$V_T = \frac{1}{3}h\left(A+\sqrt{A\,A_1}+A_1\right)\,. \tag{5}$$

Casi particolari

Specializziamo la formula 5 in due casi particolari:

- **Tronco di piramide a base quadrata**: in questo caso indichiamo con L la misura del lato della base maggiore e con l quello della base minore; allora il volume V_{TQ} di questo tronco di piramide risulta:

$$V_{TQ} = \frac{1}{3}h\left(L^2+\sqrt{L^2\,l^2}+l^2\right) = \frac{1}{3}h\left(L^2+L\,l+l^2\right)\,. \tag{6}$$

- **Tronco di cono**: ora indichiamo con R il raggio della base maggiore e con r quello della base minore; allora il volume V_{TC} del tronco di cono risulta:

$$V_{TC} = \frac{1}{3}h\left[\pi R^2+\sqrt{(\pi L^2)\,(\pi r^2)}+\pi r^2\right] = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2+R\,r+r^2\right)\,. \tag{7}$$