Somma dei quadrati dei primi n numeri interi

Premessa

È ben noto che la somma dei primi n numeri interi vale:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{1}$$

Partendo da questo risultato voglio ora dimostrare che la somma dei quadrati dei primi n numeri interi è data dalla formula:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}\,. \tag{2}$$

Dimostrazione della formula (2)

Per dimostrare il risultato (2) partiamo dall'identità

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3\,.$$

Ora, al secondo membro dell'espressione precedente poniamo $k = p+1$, cioè $p = k-1$. Quando k varia da 1 a $n+1$, p varia da 0 a n; in questo modo si ottiene

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{p=0}^{n}(p+1)^3\\ &= \sum_{p=0}^{n}(p^3+3p^2+3p+1)\\ &= \sum_{p=0}^{n} p^3 + \sum_{p=0}^{n}(3p^2) + \sum_{p=0}^{n}(3p) + \sum_{p=0}^{n} 1\,.\end{aligned} \tag{3}$$

Per chi non si trova a suo agio con il simbolo di sommatoria possiamo notare che vale, per esempio,

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}(3p^2) &= 3\cdot 0^2 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2 + \ldots + 3\cdot n^2\\ &= 3\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2 + \ldots + 3\cdot n^2\\ &= 3(1^2+2^2+\ldots+n^2)\\ &= 3\sum_{p=1}^{n} p^2\end{aligned} \tag{4}$$

In modo analogo si ha

$$\sum_{p=0}^{n} p^3 = \sum_{p=1}^{n} p^3 \tag{5}$$

e

$$\sum_{p=0}^{n}(3p) = 3\sum_{p=1}^{n} p = \frac{3n(n+1)}{2}\,, \tag{6}$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la relazione (1).

Infine, la sommatoria $\sum_{p=0}^{n} 1$ equivale a sommare il numero 1 tante volte quanti sono i numeri da 0 a n, cioè $(n+1)$ volte, per cui risulta:

$$\sum_{p=0}^{n} 1 = n+1\,. \tag{7}$$

A questo punto torniamo a considerare la catena di uguaglianze (3): sostituendo i risultati (4),(5), (6) e (7) nell'ultimo passaggio e uguagliando l'espressione così ottenuta al passaggio iniziale otteniamo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{p=0}^{n} p^3 + \sum_{p=0}^{n}(3p^2) + \sum_{p=0}^{n}(3p) + \sum_{p=0}^{n} 1 \\
&= \sum_{p=1}^{n} p^3 + 3\sum_{p=1}^{n} p^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n + 1 \\
&= \sum_{p=1}^{n} p^3 + 3\sum_{p=1}^{n} p^2 + \frac{3n^2+5n+2}{2}\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

Le espressioni che compaiono nel primo e nell'ultimo passaggio del calcolo precedente possono essere arrangiate in modo da ottenere

$$3\sum_{p=1}^{n} p^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 - \sum_{p=1}^{n} p^3 - \frac{3n^2+5n+2}{2}\,. \tag{9}$$

Ora, l'espressione $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 - \sum_{p=1}^{n} p^3$ equivale alla somma dei cubi dei primi $(n+1)$ numeri interi positivi **meno** la somma dei cubi dei primi n numeri interi positivi: ciò che sopravvive a tale sottrazione è soltanto il cubo di $(n+1)$, per cui si ha

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 - \sum_{p=1}^{n} p^3 = (n+1)^3\,. \tag{10}$$

Di conseguenza, l'equazione (9) può ora essere riscritta come:

$$\begin{aligned}
3\sum_{p=1}^{n} p^2 &= (n+1)^3 - \frac{3n^2+5n+2}{2} \\
&= \frac{2n^3+6n^2+6n+2-3n^2-5n-2}{2} \\
&= \frac{2n^3+3n^2+n}{2}\,.
\end{aligned} \tag{11}$$

Considerando ancora una volta il primo e l'ultimo termine della precedente catena di uguaglianze è possibile infine ricavare la formula (2):

$$\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}\,.$$

Conclusioni

Il metodo dimostrativo qui presentato si rivela molto potente, perché non si limita alla determinazione della somma dei *quadrati* dei primi numeri interi. Per esempio, partendo dall'identità

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^4 = \sum_{k=1}^{n+1} k^4$$

e utilizzando i risultati (1) e (2) si può determinare la somma dei *cubi* dei primi n interi positivi.

Conoscendo anche quest'ultima formula è poi possibile ricavare quella relativa alle quarte potenze e così via, senza limite, purché si abbiano pazienza e precisione a sufficienza.

Esercizi

1. Utilizzando lo stesso metodo esposto in precedenza, ricava la formula (1).

2. Dimostra che vale
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\,.$$