Liceo Scientifico G. Marconi - Classe 4S
VERIFICA SCRITTA DI MATEMATICA - 01.06.2013

COMPITO A

Esercizio A.1 Verifica se il seguente sistema lineare ammette soluzioni. In tal caso risolvilo con il metodo che preferisci (se è necessario, utilizza come parametri le incognite nelle ultime posizioni dell'ordine alfabetico).

$$\begin{cases} 4\,x - y + 3\,z = 6 \\ 2\,x + 3\,y - z = -4 \\ x - 9\,y + 7\,z = 20 \end{cases}.$$

[$\emptyset$]

Esercizio A.2 Verifica se il seguente sistema lineare ammette soluzioni. In tal caso risolvilo con il metodo che preferisci (se è necessario, utilizza come parametri le incognite nelle ultime posizioni dell'ordine alfabetico).

$$\begin{cases} 2\,x - 3\,y + t + 4\,z = 0 \\ 6\,x + y - 3\,t - 2\,z = 0 \\ 5\,y - 3\,t - 7\,z = 0 \\ 14\,x + 4\,y - 8\,t - 7\,z = 0 \end{cases}.$$

[$x{=}(z{+}4t)/10,\ y{=}(7z{+}3t)/5$]

Esercizio A.3 Risolvi la seguente disequazione goniometrica:

$$6\,\cos^2 x + \sqrt{2}\,\cos x - 2 < 0\,.$$

[$\arccos(\sqrt{2}/3){+}2k\pi{<}x{<}3\pi/4{+}2k\pi \vee 5\pi/4{+}2k\pi{<}x{<}2\pi{-}\arccos(\sqrt{2}/3){+}2k\pi$]

Esercizio A.4

a) Dimostra che le equazioni della rotazione ρ_1 di $\pi/2$ attorno al punto $C(-1;\ 0)$ e della rotazione ρ_2 di $-\pi/2$ attorno all'origine sono rispettivamente:

$$\rho_1:\ \begin{cases} x' = -y - 1 \\ y' = x + 1 \end{cases} \qquad \rho_2:\ \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}.$$

b) Sia γ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Determina le coordinate del punto $\rho_1(O)$ (O è l'origine) e le equazioni delle curve $\gamma' = \rho_1(\gamma)$ e $\gamma'' = \rho_2(\gamma')$.

c) Mostra che γ'' è la traslata di γ di un opportuno vettore B e determinare le componenti di B.

[$(-1;\ -1)$; $x^2{+}y^2{+}2x{-}2y{+}1{=}0$; $x^2{+}y^2{-}2x{-}2y{+}1{=}0$; $B(1;\ 1)$]

Esercizio A.5 Date le equazioni:

$$\begin{cases} x' = k\,y - 2 + k \\ y' = (2-k)x + 1 \end{cases},$$

dove k un numero reale.

a) Discuti per quali valori di k esse possono rappresentare le equazioni di una trasformazione geometrica del piano.

b) Determina il valore di k per cui la retta di equazione $x + y = 2$ è unita per la trasformazione precedente. Indica con t la trasformazione così trovata.

c) Trova tutti i punti uniti di t. Di che trasformazione si tratta?

[$k{\neq}0 \wedge k{\neq}2$; $k{=}1$; $P{\in}\ r$: $y{=}x{+}1$]

Esercizio A.6 (Speciale) Dati la matrice B e il vettore $\vec{x}$, definiti come

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

determina tutti i vettori $\vec{x}$ (detti *autovettori di autovalore* 2) per i quali vale la relazione $B\,\vec{x} = 2\vec{x}$. Tra i vettori trovati individua quelli che hanno modulo pari a 1.

[$[0,\ -2z,\ z]$; $\pm[0,\ -2,\ 1]/\sqrt{5}$]

Buon Lavoro!

Liceo Scientifico G. Marconi - Classe 4S
VERIFICA SCRITTA DI MATEMATICA - 01.06.2013

COMPITO B

Esercizio B.1 Verifica se il seguente sistema lineare ammette soluzioni. In tal caso risolvilo con il metodo che preferisci (se è necessario, utilizza come parametri le incognite nelle ultime posizioni dell'ordine alfabetico).

$$\begin{cases} x + y - 2\,z = 4 \\ 3\,x - 5\,y + 2\,z = 4 \\ x - 5\,y + 4\,z = -1 \end{cases} .$$

[$\emptyset$]

Esercizio B.2 Verifica se il seguente sistema lineare ammette soluzioni. In tal caso risolvilo con il metodo che preferisci (se è necessario, utilizza come parametri le incognite nelle ultime posizioni dell'ordine alfabetico).

$$\begin{cases} x - 4\,y + 2\,t - 3\,z = 0 \\ 3\,x + 2\,y - 2\,t + z = 0 \\ 7\,y - 4\,t + 5\,z = 0 \\ 8\,x + 3\,y - 4\,t + z = 0 \end{cases} .$$

[$x{=}(z{+}2t)/7,\ y{=}(4t{-}5z)/7$]

Esercizio B.3 Risolvi la seguente disequazione goniometrica:

$$4\,\sin^2 x + \sqrt{2}\,\sin x - 1 > 0\,.$$

[$\mathrm{arcsen}(\sqrt{2}/4){+}2k\pi{<}x{<}\pi{-}\mathrm{arcsen}(\sqrt{2}/4){+}2k\pi \vee 5\pi/4{+}2k\pi{<}x{<}7\pi/4{+}2k\pi$]

Esercizio B.4

a) Dimostra che le equazioni della rotazione ρ_1 di $\pi/2$ attorno all'origine e della rotazione ρ_2 di $\pi/2$ attorno al punto $C(1;\ 1)$ sono rispettivamente:

$$\rho_1 : \quad \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \qquad \rho_2 : \quad \begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = x \end{cases} .$$

b) Indica con γ la parabola di equazione $x = y^2$. Determina le coordinate del punto $\rho_2(O)$ (O è l'origine) e le equazioni delle curve $\gamma' = \rho_1(\gamma)$ e $\gamma'' = \rho_2(\gamma')$.

c) Mostra che γ'' è la simmetrica di γ rispetto ad un opportuno centro D e determina le coordinate di D.

[$(2;\ 0)$; $y{=}x^2$, $x{=}2{-}y^2$; $(1;\ 0)$]

Esercizio B.5 Considera le equazioni:

$$\begin{cases} x' = -k\,y + 1 \\ y' = (3 + 2\,k)x + k \end{cases} ,$$

dove k un numero reale.

a) Discuti per quali valori di k esse possono rappresentare le equazioni di una trasformazione geometrica del piano.

b) Determina il valore di k per cui la retta di equazione $x + y = -1$ è unita per la trasformazione precedente. Sia t la traformazione così trovata.

c) Trova tutti i punti uniti di t. Di che trasformazione si tratta?

[$k{\neq}0 \wedge k{\neq}{-}3/2$; $k{=}{-}1$; $P{\in}\ r$: $y{=}x{-}1$]

Esercizio B.6 (Speciale) Dati la matrice A e il vettore $\vec{x}$, definiti come

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} ,$$

determina tutti i vettori $\vec{x}$ (detti *autovettori di autovalore* -1) per i quali vale la relazione $A\,\vec{x} = -\vec{x}$. Tra i vettori trovati individua quelli che hanno modulo pari a 1.

[$[0,\ y,\ 2y]$; $\pm[0,\ 1,\ 2]/\sqrt{5}$]

Buon Lavoro!